View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kyoto University Research Information Repository

Kyoto University Research Information Repository

KYOTO UNIVERSITY

Title	Isolated points of special subvarieties of Jacobian Varieties
Author(s)	難波, 誠
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1979), 1979: 168-175
Issue Date	1979-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/212573
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

代数幾何学シンポジウム記録
1979年度　pp.168-175

Isolated points of special subvarieties of Jacobian varieties

(東北大理)　難波　誠

与えられた多様体上に、ある種の一次系が唯一個しか存在しないとか、有限個しか存在しないとか、と言う事を知ることは、その多様体の自己同型群や、局所モジュライを調べる上で、しばしば有効である。

ここでは、コンパクト Riemann 面の場合について、この方向についてのいくつかの結果をのべる。

最初に一般的な事に言及する。

V を非特異射影代数多様体 over $\mathbb{C}$ とし、$c \in H^{1,1}(V, \mathbb{Z})$ に対して

$$\mathcal{D}_c(V) = \{ D \mid D \text{ は } V \text{ 上の正因子で } c([D]) = c \}$$

とおく。いかなる c に対して $\mathcal{D}_c(V)$ は空でないか？　は、むずかしい問題であるが、今この集合が空でないと仮定する。Weil－Kodaira に

よれば、この集合は、ある $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の中の、代数的集合になる。　今、$D_0 \in \mathcal{D}_c(V)$ をひとつ取り、固定する。

$$\varphi:\ D \in \mathcal{D}_c(V) \longmapsto [D - D_0] \in \mathrm{Pic}^0(V)$$

なる map は、morphism となり、Jacobi map と呼ばれる。φ の各 fiber は、完備一次系より成り、（複素）射影空間と同型になる。ただし、その次元は、fiber ごとに変わりうる。

$r \geqslant 0$ を整数とし

$$W_c^r = \{ t \in \mathrm{Pic}^0(V) \mid \dim \varphi^{-1}(t) \geqslant r \}$$

とおくと、これは $\mathrm{Pic}^0(V)$ の closed complex subspace である事が示される。

さて、line bundle F on V に対して、bilinear map　$\tau = \tau_F:\ H^0(F) \times H^1(\mathcal{O}_V) \longrightarrow H^1(F)$　を

$$\tau(\{\xi_i\}, \{h_{ik}\}) = \{\xi_i h_{ik}\}$$

で定義する。ここに、$\mathcal{O}_V$ は V 上の正則函数の germs の sheaf, $\{\xi_i\}$ の ξ_i は、てきとうな V の open covering による表現, etc., とする。

<u>定理 1.</u>　$D \in \mathcal{D}_c(V)$, $\dim |D| = r$ とし、次の条件 (*) がみたされているとする。

(*) $\tau_{[D]}(H^0([D]), h) = 0$ ならば $h = 0$.
この時．$\varphi(D)$ は W_c^r の isolated point である。

これを V がコンパクト Riemann 面の時に適用すると．次の簡単な定理が得られる。ただしこの場合．$n = \deg c = \int c$ とおくと．$\mathcal{D}_c(V) = S^n V$ (n 次 symmetric product), $W_c^r = W_n^r \subset J(V)$, $\mathrm{Pic}^0(V) = J(V)$: Jacobian variety of V, となる。

<u>定理2.</u> V をコンパクト Riemann 面，D を degree n の正因子で．$\dim|D| = r$ とする。今．次の条件 (*) がみたされたとする。

(*) $$H^0(D) \times H^0(K-D) \longrightarrow H^0(K) \quad \text{の image}$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi\eta$$

が．$H^0(K)$ を span する。($K = K_V$ canonical bundle)
この時．$\varphi(D)$ は W_n^r の isolated point である。

<u>Remark.</u> 定理2の条件は．ひとつの十分条件を与えるもので．必要条件では決してない。実さい．V を genus 4 の non-hyperelliptic な

コンパクト Riemann 面とする時. V の canonical curve は. $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の中の. quadric と cubic surface の complete intersection となるが. この quadric が非特異の時は. W_3^1 は2点より成り. 定理2の条件がみたされているが. cone である時には. W_3^1 が1点より成るにもかかわらず. 定理2の条件は. みたされない。

<u>定理3.</u> C を degree d の平面代数曲線でその特異点が. k 個の nodes のみから成るものとする。V を C の non-singular model とする。D を a line section of C で. V 上の正因子とみたものとする。この時. 次の条件のいずれかがみたされれば. $\varphi(D)$ は. W_d^2 の isolated point である。

(1) $d=4$, $k=0$.

(2) $d=5$, $k\leqq 1$.

(3) $d\geqslant 6$, $k\leq d-3$.

<u>Remark.</u> $k\leq d-3$ ならば. 全ての line

sections から成る一次系は complete である。すなわち $\dim|D|=2$。

定理3は、定理2を応用したものである。定理3の条件のもとでは、恐らく、W_d^2 が有限個の点から成るであろう。$k=0$ の時は、

<u>定理4.</u> C を degree d の非特異平面代数曲線とする。もし $d \geqq 4$ ならば、W_d^2 は唯一点 $\varphi(D)$ から成る。とくに、Cの自己同型は $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の自己同型から引き起こされる。

この定理4は、多分昔から知られている事であろうが、ちゃんと書いてある文献を、私は知らない。　なお、前後するが、定理3の意味は、C を同じ degree, 同じ数の nodes を持つ curve C' に微小変形した時、C と C' とが、双有理同値 $\Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ such that $b(C)=C'$ と言うことである。

さて、linear pencil の uniqueness については、

<u>定理5.</u> V を genus g のコンパクト Riemann 面，p を素数で $(p-1)^2 \leqq g-1$ をみたすとする。この時．もし V 上に degree p の base point free linear pencil が存在すれば．それは V 上の唯一の degree p の linear pencil であり．V 上には degree $\leqq p-1$ の linear pencil は存在しない。

さて．志賀弘典氏は．多変数函数論問題特集において．次の問題を提出している。

<u>問題(志賀).</u> V，V' をそれぞれ次式で定義されるコンパクト Riemann 面とする。

$$V: \quad y^n = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m),$$
$$V': \quad y^n = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m),$$

ここに．$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$，$(m, n) = 1$（互いに素）。

この時．$V \cong V'$ となるための．必要十分条件は．$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の自己同型 b が存在して．

$$b\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \infty\} = \{\beta_1, \cdots, \beta_m, \infty\}$$

となる事であろうか？

(V, V′ が hyperelliptic で) $n=2$ の時は. 上の問題は確かに affirmative である。定理5を用いると. この hyperelliptic の場合も含んだ次の定理が. 簡単に出る。

<u>定理6.</u> p を素数, $m \geq 2p+1$, $m \equiv -1 \pmod p$,

$$V: \quad y^p = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

$$V': \quad y^p = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m) \quad \beta_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

とする。この時. $V \cong V' \Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ such that $b\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \infty\} = \{\beta_1, \cdots, \beta_m, \infty\}$.

<u>定理7.</u> p を素数, $m \geq 2p+1$, $m \equiv -1 \pmod p$,

$$V: \quad y^p = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \text{各 distinct}$$

とする。Put

$$K = \left\{ e(\ell) \in \mathrm{Aut}(V) \;\middle|\; e(\ell)(x, y) = (x, \omega^\ell y), \; \ell = 0, 1, \cdots, p-1, \quad \omega = \exp\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p} \right\}$$

and

$$G = \{\, b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \mid b \text{ は } \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \infty \text{ の間に置換を引きおこす} \,\}.$$

この時 次の exact 列が存在する。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

<u>Remark.</u> $n=3$, $m=7$ において 上の問題の $\Longleftarrow$ の部分の反例が作れる。

すなわち 各が distinct な $\alpha_1, \cdots, \alpha_7, \infty$ を一般の位置にとって $\alpha_1, \cdots, \alpha_7, \infty$ の間に置換を引きおこす $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の自己同型が 1 しかないとする。次に $\{\beta_1, \cdots, \beta_7, \infty\}$ と $b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ を $b(\alpha_1) = \infty$, $b(\alpha_2) = \beta_2, \cdots,$ $b(\alpha_7) = \beta_7$, $b(\infty) = \beta_1$ となるようにとると、次式で定義されたコンパクト Riemann 面 V と V' とは 同型でない:

$$V: \quad y^3 = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_7),$$

$$V': \quad y^3 = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_7).$$

以上。